

2022-2023 学年度第一学期期末学业水平检测

高三数学试题

本试题卷共 6 页，22 题。全卷满分 150 分。考试用时 120 分钟。

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需要改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 复数 $\frac{i-2}{1+i}$ 的虚部为

A. $\frac{3}{2}i$

B. $\frac{3}{2}$

C. $-\frac{3}{2}$

D. $-\frac{1}{2}$

2. 若 $(a+x)^3 + (a-x)^4$ 的展开式中含有 x^2 项的系数为 18，则 $a =$

A. 2

B. $\frac{3}{2}$

C. $\frac{3}{2}$ 或 -2

D. $-\frac{3}{2}$ 或 -2

3. 已知集合 $A = \{(x, y) | x^2 + y^2 - 2x = 0\}$, $B = \{(x, y) | y = k(x+1)\}$. 若 $A \cap B \neq \emptyset$, 则

A. $-\frac{\sqrt{3}}{3} \leq k \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$

B. $-\sqrt{3} \leq k \leq \sqrt{3}$

C. $k \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $k \leq -\frac{\sqrt{3}}{3}$

D. $k \geq \sqrt{3}$ 或 $k \leq -\sqrt{3}$

4. “阿基米德多面体”也称为半正多面体，是由边数不全相同的正多边形为面围成的多面体，

它体现了数学的对称美. 如图，将一个正方体沿交于一顶点的三条棱的中点截去一个三棱锥，

共可截去八个三棱锥，得到八个面为正三角形，六个面为正方形的“阿基米德多面体”，则

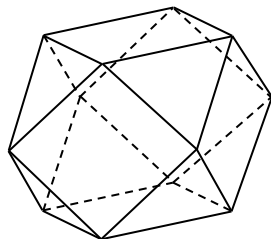
该多面体中具有公共顶点的两个正三角形所在平面的夹角正切值为

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

B. 1

C. $\sqrt{2}$

D. $2\sqrt{2}$



5. “ $m=1$ ”是“函数 $f(x)=\frac{2^x+m}{2^x-m}$ 为奇函数”的

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

6. 已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)$ ($0<\varphi<\pi$)的部分图象如下图所示, 将 $f(x)$ 的图象向左平移

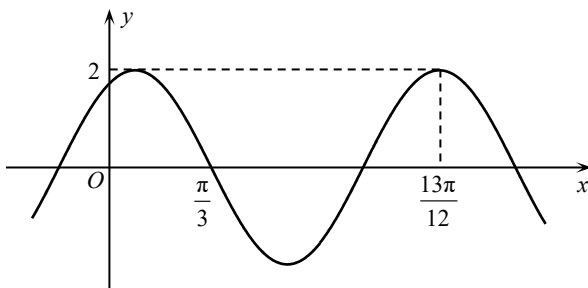
$\frac{\pi}{12}$ 个单位后得到函数 $y=g(x)$ 的图象, 则函数 $y=g(x)+g(\frac{x}{2})$ 的最小值为

A. -4

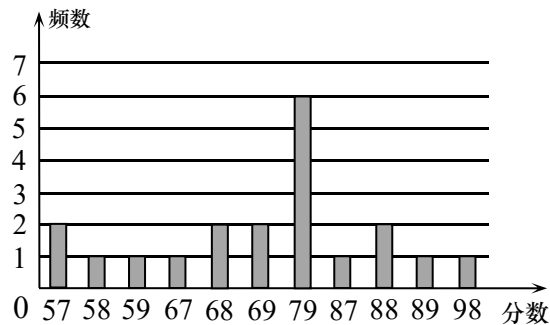
B. $-\frac{9}{4}$

C. $-\frac{7}{4}$

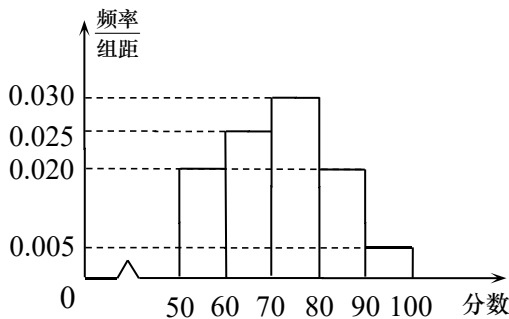
D. 0



7. 为了解甲、乙两个班级学生的物理学习情况, 从两个班学生的物理成绩(均为整数)中各随机抽查20个, 得到如图所示的数据图(用频率分布直方图估计总体平均数时, 每个区间的值均取该区间的中点值), 关于甲、乙两个班级的物理成绩, 下列结论正确的是



甲班物理成绩



乙班物理成绩

A. 甲班众数小于乙班众数

B. 乙班成绩的75百分位数为79

C. 甲班的中位数为74

D. 甲班平均数大于乙班平均数估计值

8. 已知定义域为 $[0,1]$ 的“类康托尔函数” $f(x)$ 满足: ① $\forall 0\leq x_1<x_2\leq 1, f(x_1)\leq f(x_2)$;

② $f(x)=2f(\frac{x}{3})$; ③ $f(x)+f(1-x)=1$. 则 $f(\frac{1}{2023})=$

A. $\frac{1}{32}$

B. $\frac{1}{64}$

C. $\frac{1}{128}$

D. $\frac{1}{256}$

二、多项选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分。

9. 通过长期调查知，人类汗液中 A 指标的值 X 服从正态分布 $N(10, 2.5^2)$. 则

- A. 估计100人中汗液 A 指标的值超过10的人数约为50
- B. 估计100人中汗液 A 指标的值超过12.5的人数约为16
- C. 估计100人中汗液 A 指标的值不超过15的人数约为95
- D. 随机抽检5人中汗液 A 指标的值恰有2人超过10的概率为 $\frac{5}{16}$

参考数据：

若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = 0.6827$; $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = 0.9545$.

10. 已知对任意平面向量 $\overrightarrow{AB} = (x, y)$, 把 \overrightarrow{AB} 绕其起点沿逆时针方向旋转 θ 角得到向量 $\overrightarrow{AP} = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$, 叫做把点 B 绕点 A 沿逆时针方向旋转 θ 角得到点 P . 已知平面内点 $A(2, 1)$, 点 $B(2+t, 1-t)$, $|\overrightarrow{AB}| = 2\sqrt{2}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OA} > 0$, 点 B 绕点 A 沿逆时针方向旋转 $\frac{\pi}{3}$ 角得到点 P , 则

- A. $|\overrightarrow{BP}| = 2\sqrt{2}$
- B. $\overrightarrow{AB} = (-2, 2)$
- C. B 的坐标为 $(4, -1)$
- D. P 的坐标为 $(3+\sqrt{3}, \sqrt{3})$

11. 已知 O 为坐标原点，离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ 的椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , C 与曲线 $y = \cos x$ 恰有三个交点，则

- A. 椭圆 C 的长轴长为 $\sqrt{3}$
- B. C 的内接正方形面积等于3
- C. 点 W 在 C 上， $WF_1 \perp WF_2$, 则 $\triangle WF_1F_2$ 的面积等于1
- D. 曲线 C 与曲线 $y = \sqrt{2}x - 4 \ln x + 2 \ln 2 - 1$ 没有交点

12. 已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足 $a_1 = 1, b_1 = 0, a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n - \frac{b_n}{2} + 1, 2b_{n+1} = \frac{3}{2}b_n - \frac{a_n}{4} - 1$. 则

- A. $a_2 - 2b_2 = \frac{1}{2}$
- B. 数列 $\{a_n + 2b_n\}$ 是等比数列
- C. 数列 $\{a_n - 2b_n\}$ 是等差数列
- D. $a_{n+1} > a_n$

三、填空题：本题共 4 个小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知 $\sin \alpha + \sin \beta = 1$, $\cos \alpha + \cos \beta = \sqrt{2}$, 则 $\cos(\alpha - \beta) =$ _____.
14. 将 8 块完全相同的巧克力分配给 A, B, C, D 四人, 每人至少分到 1 块且最多分到 3 块, 则不同的分配方案共有_____种 (用数字作答).
15. 已知 O 为坐标原点, 抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 过 F 的直线交 C 于 A, B 两点, A, B 中点 D 在 x 轴上方且其横坐标为 1, $|AB| = 3$, 则直线 AB 的斜率为_____.
16. 已知球 O 的半径为 2, 圆锥 W 的顶点和底面圆周上的点均在球 O 上, 记球心 O 到圆锥 W 底面的距离为 h , 圆锥 W 的底面半径为 r . 则 (1) $h \cdot r$ 的最大值为_____; (2) 圆锥 W 体积的最大值为_____.
- (本题第一空 2 分, 第二空 3 分)

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

在 $\triangle ABC$ 中, $\sin B \cdot \sin C \cdot \cos A + 2 \sin A \cdot \sin C \cdot \cos B = 3 \sin A \cdot \sin B \cdot \cos C$, 内角 A, B, C 的对边分别记为 a, b, c .

(1) 求 $\frac{a^2 + 2b^2}{c^2}$ 的值;

(2) 求 $\cos C$ 的最小值.

18. (12 分)

如图 1 所示, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 E, F 在线段 AB 上, 点 D 在线段 BC 上, $AE = EF = FB = 1$, $CE = 2, DF = 1$, $CE \perp AB$. 将 $\triangle ACE$, $\triangle BDF$ 分别沿 CE, DF 折起至点 A, B 重合为点 G , 形成如图 2 所示的几何体 W , 在几何体 W 中作答下面的问题.

(1) 证明: 平面 $EFG \perp$ 平面 $CEFD$;

(2) 求点 D 到平面 CFG 的距离.

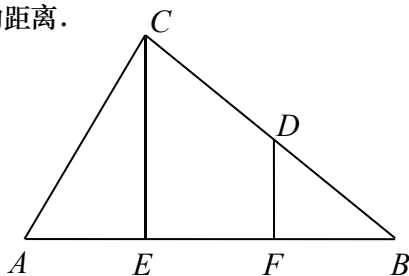


图 1

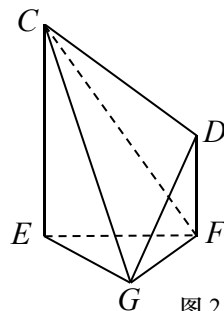


图 2

19. (12 分)

记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ， $a_1 = 1$ ，_____。给出下列两个条件：

条件①：数列 $\{a_n\}$ 和数列 $\{S_n + a_1\}$ 均为等比数列；条件②： $2^n a_1 + 2^{n-1} a_2 + \cdots + 2a_n = na_{n+1}$ 。

试在上面的两个条件中任选一个，补充在上面的横线上，完成下列两问的解答：

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 记正项数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ， $b_1 = a_2$ ， $b_2 = a_3$ ， $4T_n = b_n \cdot b_{n+1}$ ，求 $\sum_{i=1}^{2n} [(-1)^i b_i b_{i+1}]$ 。

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分。

20. (12 分)

由 mn 个小正方形构成长方形网格有 m 行和 n 列。每次将一个小球放到一个小正方形内，放满为止，记为一轮。每次放白球的概率为 p ，放红球的概率为 q ， $p + q = 1$ 。

(1) 若 $m = 2$ ， $p = q = \frac{1}{2}$ ，记 y 表示 100 轮放球实验中“每一列至少一个红球”的轮数，统计数据如下：

| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-----|----|----|----|----|----|
| y | 76 | 56 | 42 | 30 | 26 |

求 y 关于 n 的回归方程 $\ln \hat{y} = \hat{b}n + \hat{a}$ ，并预测 $n = 10$ 时， y 的值（精确到 1）；

(2) 若 $m = 2$ ， $n = 2$ ， $p = \frac{1}{3}$ ， $q = \frac{2}{3}$ ，记在每列都有白球的条件下，含红球的行数为随机变量 X ，求 X 的分布列和数学期望；

(3) 求事件“不是每一列都至少一个红球”发生的概率，并证明： $(1 - p^m)^n + (1 - q^n)^m \geq 1$ 。

附：经验回归方程系数： $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i y_i - k \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sum_{i=1}^k x_i^2 - k \bar{x}^2}$ ， $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \bar{x}$ ； $\sum_{i=1}^5 n_i \cdot \ln y_i = 53$ ， $\overline{\ln y} = 3.8$ 。

21. (12分)

已知 O 为坐标原点, 动直线 $l: y = kx + m (km \neq 0)$ 与双曲线 $C: x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$ 的渐近线交于 A, B 两点, 与椭圆 $D: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 交于 E, F 两点. 当 $k^2 = 10$ 时, $2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = 3(\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF})$.

- (1) 求双曲线 C 的方程;
- (2) 若动直线 l 与 C 相切, 证明: ΔOAB 的面积为定值.

22. (12分)

已知函数 $f(x) = x \ln x + \frac{1}{e}$ 的最小值和 $g(x) = \ln(1+x) - ax$ 的最大值相等.

- (1) 求 a ;
- (2) 证明: $\ln x > e^{-x} - \frac{2}{ex}$;
- (3) 已知 m 是正整数, 证明: $[1 + \frac{1}{2m(m+1)}]^{m+1} > e^{\frac{1}{2m+2}}$.